

# Borne de Weiss-Weinstein pour la localisation de source polarisée à l'aide d'un réseau de capteurs COLD

Dinh Thang Vu, Alexandre Renaux, Remy Boyer, Sylvie Marcos

## ► To cite this version:

Dinh Thang Vu, Alexandre Renaux, Remy Boyer, Sylvie Marcos. Borne de Weiss-Weinstein pour la localisation de source polarisée à l'aide d'un réseau de capteurs COLD. GretsI 2011, Sep 2011, Bordeaux, France. 4p. hal-00769356

HAL Id: hal-00769356

<https://hal-supelec.archives-ouvertes.fr/hal-00769356>

Submitted on 15 Mar 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Borne de Weiss-Weinstein pour la localisation de source polarisée à l'aide d'un réseau de capteurs *COLD*

Dinh Thang VU, Alexandre RENAUX, Rémy BOYER, Sylvie MARCOS

Laboratoire des Signaux et Systèmes (L2S)  
Université Paris-Sud XI, CNRS, SUPELEC  
Gif-Sur-Yvette, France

{Vu, Renaux, Remy.Boyer, Marcos}@lss.supelec.fr

**Résumé** – Dans cette contribution, on considère le problème de la détermination des performances ultimes, en terme d'erreur quadratique moyenne (EQM), pour l'estimation de la direction d'arrivée (DDA) d'une source polarisée à l'aide d'un réseau de capteurs particuliers. Il s'agit d'un réseau dont les capteurs sont constitués par des boucles et des dipôles orthogonaux et co-centrés, plus connu dans la littérature anglo-saxonne par la dénomination *COLD* (cocentered orthogonal loop and dipole).

**Abstract** – In the context of polarized sources localization using a cocentered orthogonal loop and dipole array, direction-of-arrival estimation performance in terms of mean square error are investigated. In order to evaluate these performance for both asymptotic and non-asymptotic scenarios (low number of snapshot and/or low signal to noise ratio) we derive closed-form expressions of the Weiss-Weinstein bound. The analysis is performed under both conditional and unconditional source signal models. We show the good ability of the proposed bound to predict the well known threshold effect. We also show the influence of the polarization parameters.

## 1 Introduction

En traitement d'antenne, l'utilisation de réseaux de capteurs capables de traiter des sources polarisées est importante pour plusieurs applications (voir [1]). En particulier, le réseau *COLD* a déjà été étudié dans la littérature. Dans [1], les auteurs ont introduit une technique efficace pour l'estimation conjointe de la direction d'arrivée (DDA) et des paramètres de polarisation. Dans [2], le seuil de résolution statistique a été calculé. Les auteurs ont utilisé la borne de Cramér-Rao pour montrer que le réseau *COLD* conduit à de meilleures performances par rapport à un réseau classique.

Afin de quantifier ces performances indépendamment de la règle d'estimation choisie, les bornes inférieures de l'EQM sont traditionnellement utilisées. On citera, en particulier, la borne de Cramér-Rao (BCR). Cependant, ce problème d'estimation est connu pour être non-linéaire, c'est-à-dire que pour une faible valeur du Rapport Signal sur Bruit (RSB) et/ou pour un faible nombre d'observations, on observe un accroissement rapide de l'EQM des estimateurs [3]. Ce phénomène est appelé décrochement. Malheureusement, la BCR n'est pas capable de capturer ce décrochement [4]. Pour cette raison, nous nous sommes intéressés à la mise en oeuvre d'une borne plus pertinente que la BCR appelée borne de Weiss-Weinstein (BWW) [5]. De plus, cette borne étant Bayésienne, elle prend en compte le support des paramètres via leurs distributions *a priori* et, par conséquent, nous fournit un outil puissant afin de capturer le comportement de l'EQM des estimateurs dans les régions asymptotique et non-asymptotique.

Dans le contexte du traitement d'antenne, quelques travaux tels que [6], ont évalué la BWW par le biais de simulations (c'est-à-dire sans proposer d'expressions analytiques). La borne a été comparée avec l'EQM de l'algorithme MUSIC pour le cas particulier d'un réseau de capteurs constitué de  $8 \times 8$  éléments. Dans [7], les auteurs ont présenté une comparaison numérique entre la BCR Bayésienne, la borne de Ziv-Zakai et la BWW. Dans [8], des simulations numériques de la BWW pour optimiser la position des capteurs dans un réseau non-linéaire ont été présentées. Dans [9], en considérant le contexte de l'acoustique sous-marine, les auteurs ont proposé des expressions semi-analytiques de la BWW pour le modèle stochastique (c'est-à-dire lorsque les signaux source sont supposés aléatoires). Concernant le modèle déterministe, l'expression analytique de la BWW a été proposée dans le cadre de l'analyse spectrale dans [10]. Récemment, dans [11], les expressions analytiques de la BWW pour le problème d'estimation de la DDA utilisant un réseau de capteurs planaire ont été développées et appliquées au problème du positionnement des capteurs. Il faut noter que tous les travaux précédents n'ont considéré que le contexte où le réseau n'est pas capable de traiter la polarisation des sources.

Dans cette contribution, nous proposons des expressions analytiques de la BWW dans le contexte sus-mentionné d'un réseau de capteurs *COLD*. Ces résultats sont donnés pour les deux types de modèles de signaux classiques en traitement d'antenne, à savoir les modèles dits conditionnel et non-conditionnel.

## 2 Modèle des observations

On considère le contexte de l'estimation passive d'une DDA pour une source polarisée, située en champ lointain et dont le signal est supposé à bande étroite à partir d'un réseau linéaire (non-uniforme) constitué de  $N$  capteurs *COLD*. La position des capteurs dans le réseau est caractérisée par rapport à un référentiel par le vecteur  $\mathbf{d} = [d_1 \dots d_N]$ . On supposera que la source est située dans le même plan que le réseau de capteurs [1]. Par conséquent, la DDA de la source ne dépend que de l'azimut noté  $\phi$ . La polarisation du signal source est supposée connue ou bien a été estimée auparavant. Le vecteur de polarisation est donné par :  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{j2\pi A_{sl}}{\lambda} \cos \rho & -L_{sd} \sin \rho e^{j\psi} \end{bmatrix}^T$ , où  $\rho \in [0, \pi/2]$ , et  $\psi \in [-\pi, \pi]$  représentent les angles de polarisation.  $\lambda$  est la longueur d'onde et  $A_{sl}$ ,  $L_{sd}$  sont la longueur des dipôles et le diamètre des boucles, tels que  $A_{sl} < 3\lambda/10$  et  $L_{sd} < \lambda/10$ , respectivement [1]. La réponse du  $i^{eme}$  capteur à l'instant  $t$  est un vecteur à deux composantes donné par [4] :  $\begin{bmatrix} \hat{y}_i(t) & \check{y}_i(t) \end{bmatrix}^T = [\mathbf{c}(\phi)]_i s(t) \mathbf{u} + \mathbf{b}_i(t)$ ,  $t = 1, \dots, T$ ,  $s(t)$  est le signal de la source,  $T$  est le nombre des observations, et  $[\mathbf{c}(\phi)]_i = \exp(j\frac{2\pi}{\lambda} d_i \sin \phi)$  est le  $i^{eme}$  élément du vecteur directionnel  $\mathbf{c}(\phi)$ .  $\mathbf{b}_i(t)$  est un bruit additif supposé complexe, circulaire, non-corrélé (spatialement, temporellement et entre les boucles et les dipôles de chaque capteur) gaussien de moyenne nulle et de covariance  $\sigma^2 \mathbf{I}$ . Concernant le signal source, on considérera les deux modèles suivants :

- $\mathcal{M}_1$  : Le modèle déterministe ou conditionnel où le signal est supposé connu [12].
- $\mathcal{M}_2$  : Le modèle stochastique ou non-conditionnel où le signal est supposé aléatoire, complexe, circulaire, gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance  $\sigma_s^2 \mathbf{I}$  connue. Pour ce modèle, le signal est également supposé indépendant du bruit [12].

On considérera plus particulièrement l'estimation de l'angle électrique  $\omega = \sin \phi$ . Cette étude de performance se déroulant dans le contexte Bayésien, on supposera que le paramètre  $\omega$  est aléatoire avec une loi uniforme  $\omega \sim \mathcal{U}[-1, 1]$  *a priori* :

$$p(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq \omega \leq 1, \\ 0 & \text{si non.} \end{cases} \quad (1)$$

Donc, le modèle des observations à l'instant  $t$  s'écrit

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{y}}(t) \\ \check{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{a}(\omega) s(t) + \mathbf{b}(t), \quad (2)$$

où  $\mathbf{a}(\omega) = \mathbf{u} \otimes \mathbf{c}(\omega)$ , où  $\hat{\mathbf{y}}(t) = [\hat{y}_1(t) \dots \hat{y}_N(t)]^T$ , et où  $\check{\mathbf{y}}(t) = [\check{y}_1(t) \dots \check{y}_N(t)]^T$ . A partir des hypothèses précédentes, la fonction de vraisemblance de toutes les observations, *i.e.*, du vecteur  $\mathbf{y} = [\mathbf{y}^T(1) \dots \mathbf{y}^T(T)]^T$ , pour le modèle  $\mathcal{M}_1$  est donnée par

$$p(\mathbf{y}|\omega) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{2NT}} e^{\left(-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=1}^T \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{a}(\omega) s(t)\|^2\right)}, \quad (3)$$

et la fonction de vraisemblance pour le modèle  $\mathcal{M}_2$  est donnée par

$$p(\mathbf{y}|\omega) = \frac{1}{\pi^{2NT} |\mathbf{R}(\omega)|^T} e^{\left(-\sum_{t=1}^T \mathbf{y}(t)^H \mathbf{R}(\omega)^{-1} \mathbf{y}(t)\right)}, \quad (4)$$

où  $\mathbf{R}(\omega) = \sigma_s^2 \mathbf{a}(\omega) \mathbf{a}(\omega)^H + \sigma^2 \mathbf{I}_{2N}$  représente la matrice de covariance pour le modèle  $\mathcal{M}_2$ . La BWW sera dérivée pour le modèle  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ .

## 3 Borne de Weiss-Weinstein pour le réseau COLD

La BWW est obtenue, en général, en cherchant le supremum d'une fonction sur un ensemble de points test et sur un ensemble de paramètres  $s \in [0, 1]$ . Concernant le paramètre  $s$ , on utilise souvent l'hypothèse  $s = 1/2$  [9–11].  $\Omega$  et  $\Theta$  représentent respectivement l'espace des observations et l'espace des paramètres, la BWW pour  $s = 1/2$  s'écrit [5] :

$$\int_{\Theta} \int_{\Omega} (\hat{\omega} - \omega)^2 p(\mathbf{y}, \omega) d\mathbf{y} d\omega \geq WWB = \sup_h \frac{h^2 \eta(h, 0) \eta(0, h)}{2(\eta(h, h) - \eta(h, -h))} \quad (5)$$

où  $\hat{\omega}$  est un estimateur de  $\omega$ , où  $p(\mathbf{y}, \cdot)$  représente la loi jointe entre le vecteur des observations et le paramètre (ou un point de test), et où  $h$  représente la différence entre le paramètre d'intérêt et un point de test appartenant à l'espace des paramètres (c'est-à-dire qu'il faut respecter  $\omega + h \in \Theta$ ). On a défini

$$\begin{aligned} \eta(\alpha, \beta) &= \int_{\Theta} \int_{\Omega} \sqrt{p(\mathbf{y}, \omega + \alpha) p(\mathbf{y}, \omega + \beta)} d\mathbf{y} d\omega \\ &= \int_{\Theta} \sqrt{p(\omega + \alpha) p(\omega + \beta)} \zeta(\omega, \alpha, \beta) d\omega \end{aligned} \quad (6)$$

et  $\zeta(\omega, \alpha, \beta) = \int_{\Omega} \sqrt{p(\mathbf{y}|\omega + \alpha) p(\mathbf{y}|\omega + \beta)} d\mathbf{y}$  où  $p(\cdot)$  représente la distribution *a priori* du paramètre.

### 3.1 Modèle déterministe $\mathcal{M}_1$

À partir de l'équation (3), l'expression de  $\zeta(\alpha, \beta)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \zeta(\alpha, \beta) &= \int_{\Omega} \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{2NT}} \\ &\times e^{\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T (\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{a}(\omega + \alpha) s(t)\|^2 + \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{a}(\omega + \beta) s(t)\|^2)\right)} d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (7)$$

Par le changement de variable

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) - \frac{1}{2} (\mathbf{a}(\omega + \alpha) s(t) + \mathbf{a}(\omega + \beta) s(t)),$$

on obtient

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T \left( \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{a}(\omega + \alpha) s(t)\|^2 + \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{a}(\omega + \beta) s(t)\|^2 \right) \\ &= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=1}^T \left( \|\mathbf{x}(t)\|^2 + \frac{1}{4} \|\mathbf{a}(\omega + \alpha) - \mathbf{a}(\omega + \beta)\|^2 \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Puisque

$$\int_{\Omega} \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{2NT}} \exp\left(\sum_{t=1}^T -\frac{1}{\sigma^2} \|\mathbf{x}(t)\|^2\right) d\mathbf{x} = 1, \quad (9)$$

on a

$$\zeta(\alpha, \beta) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{s}\|^2}{4\sigma^2} \|\mathbf{a}(\omega + \alpha) - \mathbf{a}(\omega + \beta)\|^2\right). \quad (10)$$

Grâce à la structure du vecteur  $\mathbf{a}(\omega) = \mathbf{u} \otimes \mathbf{c}(\omega)$ , et sachant que  $\mathbf{u}^H \mathbf{u} = \frac{4\pi^2 A_{sl}^2}{\lambda^2} \cos^2 \rho + L_{sd}^2 \sin^2 \rho$ , les expressions analytiques de  $\|\mathbf{a}(\omega + \alpha) - \mathbf{a}(\omega + \beta)\|^2$  sont données par

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}(\omega + \alpha)\|^2 &= \|\mathbf{a}(\omega + \beta)\|^2 \\ &= N \left( \frac{4\pi^2 A_{sl}^2}{\lambda^2} \cos^2 \rho + L_{sd}^2 \sin^2 \rho \right), \\ \mathbf{a}(\omega + \alpha)^H \mathbf{a}(\omega + \beta) &= \left( \frac{4\pi^2 A_{sl}^2}{\lambda^2} \cos^2 \rho + L_{sd}^2 \sin^2 \rho \right) \\ &\quad \times \sum_{i=1}^N e^{j \frac{2\pi}{\lambda} d_k (\beta - \alpha)}, \end{aligned} \quad (11)$$

et par

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\omega + \beta)^H \mathbf{a}(\omega + \alpha) &= \left( \frac{4\pi^2 A_{sl}^2}{\lambda^2} \cos^2 \rho + L_{sd}^2 \sin^2 \rho \right) \\ &\quad \times \sum_{i=1}^N e^{j \frac{2\pi}{\lambda} d_k (\alpha - \beta)}. \end{aligned} \quad (12)$$

On trouve que les fonctions  $\zeta(\alpha, \beta)$  ne dépendent plus du paramètre  $\omega$ . Par conséquent,  $\eta(\alpha, \beta)$  est donné par

$$\eta(\alpha, \beta) = \zeta(\alpha, \beta) \int_{\Theta} \sqrt{p(\omega + \alpha)p(\omega + \beta)} d\omega. \quad (14)$$

Sous l'hypothèse d'une distribution *a priori* uniforme, on obtient

$$\int_{\Theta} \sqrt{p(\omega + \alpha)p(\omega + \beta)} = 1 - \frac{|\alpha| + |\beta|}{2}. \quad (15)$$

À partir de (5), (11), (12), (13), (14) et (15), l'expression analytique de la BWW est donnée par (16) (voir la page suivante).

### 3.2 Modèle stochastique $\mathcal{M}_2$

À partir de (4), l'expression analytique de  $\zeta(\alpha, \beta)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \zeta(\alpha, \beta) &= \int_{\Omega} \frac{1}{\pi^{2NT} |\mathbf{R}(\omega + \alpha)|^{T/2} |\mathbf{R}(\omega + \beta)|^{T/2}} \\ &\quad \times e^{\left(-\sum_{t=1}^T \mathbf{y}(t)^H \left( \frac{\mathbf{R}(\omega + \alpha)^{-1} + \mathbf{R}(\omega + \beta)^{-1}}{2} \right) \mathbf{y}(t)\right)} d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (17)$$

En posant  $\mathbf{\Gamma}^{-1} = \frac{\mathbf{R}(\omega + \alpha)^{-1} + \mathbf{R}(\omega + \beta)^{-1}}{2}$ , on obtient,  $|\mathbf{\Gamma}| = \frac{2^{2N}}{|\mathbf{R}(\omega + \alpha)^{-1} + \mathbf{R}(\omega + \beta)^{-1}|}$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \zeta(\alpha, \beta) &= \frac{|\mathbf{\Gamma}|^T}{|\mathbf{R}(\omega + \alpha)|^{T/2} |\mathbf{R}(\omega + \beta)|^{T/2}} \\ &\quad \times \int_{\Omega} \frac{1}{\pi^{2NT} |\mathbf{\Gamma}|^T} \exp\left(-\sum_{t=1}^T \mathbf{y}(t)^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{y}(t)\right) d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (18)$$

Puisque  $\int_{\Omega} \frac{1}{\pi^{2NT} |\mathbf{\Gamma}|^T} \exp\left(-\sum_{t=1}^T \mathbf{y}(t)^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{y}(t)\right) d\mathbf{y} = 1$ , on a

$$\zeta(\alpha, \beta) = \frac{|\mathbf{\Gamma}|^T}{|\mathbf{R}(\omega + \alpha)|^{T/2} |\mathbf{R}(\omega + \beta)|^{T/2}}. \quad (19)$$

Grâce à la structure de la matrice  $\mathbf{R}(\omega + \delta) = \sigma_s^2 \mathbf{a}(\omega + \delta) \mathbf{a}(\omega + \delta)^H + \sigma^2 \mathbf{I}_{2N}$ , on a

$$|\mathbf{R}(\omega + \delta)| = \sigma^{4N} \left( 1 + \frac{\sigma_s^2}{\sigma^2} \|\mathbf{a}(\omega + \delta)\|^2 \right). \quad (20)$$

En outre, par l'identité Woodbury, on obtient

$$\mathbf{R}(\omega + \delta)^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} \left( \mathbf{I}_{2N} - \frac{\sigma_s^2 \mathbf{a}(\omega + \delta) \mathbf{a}(\omega + \delta)^H}{\sigma_s^2 \|\mathbf{a}(\omega + \delta)\|^2 + \sigma^2} \right), \quad (21)$$

donc,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\omega + \alpha)^{-1} + \mathbf{R}(\omega + \beta)^{-1} &= \\ \frac{1}{\sigma^2} \left( 2\mathbf{I}_{2N} - \frac{\sigma_s^2 \mathbf{a}(\omega + \alpha) \mathbf{a}(\omega + \alpha)^H}{\sigma_s^2 \|\mathbf{a}(\omega + \alpha)\|^2 + \sigma^2} - \frac{\sigma_s^2 \mathbf{a}(\omega + \beta) \mathbf{a}(\omega + \beta)^H}{\sigma_s^2 \|\mathbf{a}(\omega + \beta)\|^2 + \sigma^2} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Le déterminant de la matrice  $\mathbf{R}(\omega + \alpha)^{-1} + \mathbf{R}(\omega + \beta)^{-1}$  est obtenu par une analyse des valeurs propres. En particulier, il y a  $2N - 2$  valeurs propres qui sont égales à  $2/\sigma^2$ , et les vecteurs propres correspondant aux deux dernières valeurs propres forment une combinaison linéaire :  $\mathbf{a}(\omega + \alpha) + q\mathbf{a}(\omega + \beta)$ . De plus, ces deux valeurs propres  $\nu$  sont des solutions de l'équation suivante :

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}(\omega + \alpha)^{-1} + \mathbf{R}(\omega + \beta)^{-1}) (\mathbf{a}(\omega + \alpha) + q\mathbf{a}(\omega + \beta)) \\ = \nu (\mathbf{a}(\omega + \alpha) + q\mathbf{a}(\omega + \beta)), \end{aligned} \quad (23)$$

ce qui se réduit à

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\omega + \alpha) \left( \frac{1}{\sigma^2} (2 - A \|\mathbf{a}(\omega + \alpha)\|^2 - qAC) - \nu \right) \\ + \mathbf{a}(\omega + \beta) \left( \frac{1}{\sigma^2} (2q - Bq \|\mathbf{a}(\omega + \beta)\|^2 - BC^H) - q\nu \right) = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

où  $A = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 \|\mathbf{a}(\omega + \alpha)\|^2 + \sigma^2}$ ,  $B = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 \|\mathbf{a}(\omega + \beta)\|^2 + \sigma^2}$  et  $C = \mathbf{a}(\omega + \alpha)^H \mathbf{a}(\omega + \beta)$ . On obtient l'équation

$$\begin{aligned} \nu^2 \sigma^4 + \nu \sigma^2 (2 - A \|\mathbf{a}(\omega + \alpha)\|^2 - 2 + B \|\mathbf{a}(\omega + \beta)\|^2) \\ - 4 + 2A \|\mathbf{a}(\omega + \alpha)\|^2 + 2B \|\mathbf{a}(\omega + \beta)\|^2 \\ - AB \|\mathbf{a}(\omega + \alpha)\|^2 \|\mathbf{a}(\omega + \beta)\|^2 + ABC C^H = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

En résolvant (25) pour  $\nu$ , et vu que

$$\|\mathbf{a}(\omega + \alpha)\|^2 = \|\mathbf{a}(\omega + \beta)\|^2 = \|\mathbf{a}(\omega)\|^2,$$

on obtient

$$\begin{aligned} |\mathbf{R}(\omega + \alpha)^{-1} + \mathbf{R}(\omega + \beta)^{-1}| &= \prod_{i=1}^{2N} \nu_i \\ &= \frac{2^{2N}}{\sigma^{4N}} \left( \frac{\sigma^2}{\|\mathbf{a}(\omega)\|^2 \sigma_s^2 + \sigma^2} + \frac{1}{4} \frac{\sigma_s^4 (\|\mathbf{a}(\omega)\|^4 - \|C\|^2)}{(\|\mathbf{a}(\omega)\|^2 \sigma_s^2 + \sigma^2)^2} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Finalement, en remplaçant (20), (26) dans (19), on a

$$\zeta(\alpha, \beta) = \left( 1 + \frac{\sigma_s^2 (\|\mathbf{a}(\omega)\|^4 - \|\mathbf{a}(\omega + \alpha)^H \mathbf{a}(\omega + \beta)\|^2)}{4\sigma^2 (\|\mathbf{a}(\omega)\|^2 \sigma_s^2 + \sigma^2)} \right)^{-T}. \quad (27)$$

Dans (11), (12), et (13), on trouve que  $\zeta(\alpha, \beta)$  ne dépend pas du paramètre  $\omega$ , comme dans le cas déterministe. Par conséquent, l'expression analytique de la BWW est donnée par (28) (voir la page suivante).

$$WWB = \sup_h \frac{h^2 \left(1 - \frac{|h|}{2}\right)^2 \exp\left(-\frac{\|s\|^2}{\sigma^2} \left(\frac{4\pi^2 A_{sl}^2}{\lambda^2} \cos^2 \rho + L_{sd}^2 \sin^2 \rho\right) \left(N - \sum_{k=1}^N \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} d_k h\right)\right)\right)}{2 \left(1 - \frac{|h|}{2}\right) - 2(1 - |h|) \exp\left(-\frac{\|s\|^2}{2\sigma^2} \left(\frac{4\pi^2 A_{sl}^2}{\lambda^2} \cos^2 \rho + L_{sd}^2 \sin^2 \rho\right) \left(N - \sum_{k=1}^N \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda} d_k h\right)\right)\right)}. \quad (16)$$

$$WWB = \sup_h \frac{h^2 \left(1 - \frac{|h|}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{\sigma_s^2 \left(\frac{4\pi^2 A_{sl}^2}{\lambda^2} \cos^2 \rho + L_{sd}^2 \sin^2 \rho\right)^2 \left(N^2 - \left\| \sum_{k=1}^N \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} d_k h\right) \right\|^2\right)}{4\sigma^2 \left(N \left(\frac{4\pi^2 A_{sl}^2}{\lambda^2} \cos^2 \rho + L_{sd}^2 \sin^2 \rho\right) \sigma_s^2 + \sigma^2\right)}\right)^{-2T}}{2 \left(1 - \frac{|h|}{2}\right) - 2(1 - |h|) \left(1 + \frac{\sigma_s^2 \left(\frac{4\pi^2 A_{sl}^2}{\lambda^2} \cos^2 \rho + L_{sd}^2 \sin^2 \rho\right)^2 \left(N^2 - \left\| \sum_{k=1}^N \exp\left(j \frac{4\pi}{\lambda} d_k h\right) \right\|^2\right)}{4\sigma^2 \left(N \left(\frac{4\pi^2 A_{sl}^2}{\lambda^2} \cos^2 \rho + L_{sd}^2 \sin^2 \rho\right) \sigma_s^2 + \sigma^2\right)}\right)^{-T}}. \quad (28)$$

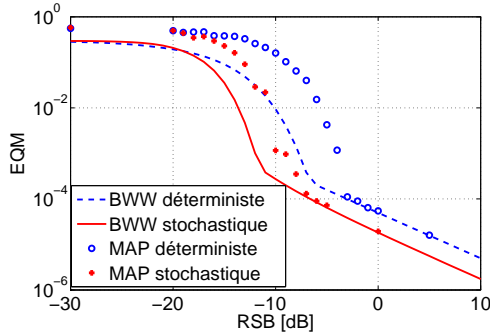


FIG. 1 – MAP par rapport à la BWW.

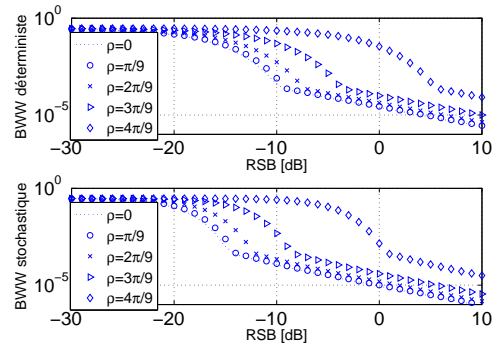


FIG. 2 – BWW en fonction du paramètre de polarisation  $\rho$ .

## 4 Résultats de simulations

On considère un réseau linéaire uniforme composé de  $N = 10$  capteurs *COLD* avec une distance entre capteurs de  $\lambda/2$ . Les paramètres de polarisation sont fixés à  $\rho = \pi/4$ ,  $\psi = \pi/3$ ,  $A_{sl} = 2\lambda/10$ , et  $L_{sd} = \lambda/10$ . Le nombre des observations est égal à  $T = 20$ . Enfin, l'EQM empirique de l'estimateur du maximum *a posteriori* est réalisé à partir de 1000 tirages de Monte Carlo. La Fig. 1 montre que la BWW donne une bonne approximation du décrochement de l'estimateur du maximum *a posteriori* pour les deux modèles de signaux considérés ici.

Toujours dans le cas du scénario sus-mentionné, on considère l'impact du paramètre de polarisation  $\rho$  sur la BWW. La Fig. 2 montre que les meilleures performances sont obtenues lorsque ce paramètre tend vers zéro.

## 5 Conclusion

Dans ce papier, nous avons établi les expressions analytiques de la BWW pour le contexte de la localisation des sources à l'aide d'un réseau de capteurs *COLD* pour les modèles de signaux déterministe et stochastique.

## Références

[1] J. Li, P. Stoica, and D. Zheng, "Efficient direction and polarization estimation with a *COLD* array," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 44, no. 4, pp. 539–547, Apr. 1996.

[2] M. N. El Korso, R. Boyer, A. Renaux, and S. Marcos, "Statistical resolution limit of the uniform linear cocentered orthogonal loop and dipole array," vol. 59, no. 1, pp. 425–431, 2011.

[3] H. L. VanTrees and K. L. Bell, *Bayesian bounds for parameter estimation and nonlinear filtering/tracking*. New York: Wiley, 2007.

[4] R. Boyer, "Analysis of the cold uniform linear array," in *Proc. IEEE Int. Work. Signal Processing, Wireless Communications*, Perugia, Italy, 2009.

[5] E. Weinstein and A. J. Weiss, "A general class of lower bounds in parameter estimation," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 34, pp. 338–342, Mar. 1988.

[6] T. J. Nohara and S. Haykin, "Application of the Weiss-Weinstein bound to a two dimensional antenna array," in *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 36, no. 9, Sep. 1988, pp. 1533–1534.

[7] H. Nguyen and H. L. VanTrees, "Comparison of performance bounds for DOA estimation," in *IEEE Seventh SP Workshop on Statistical Signal and Array Processing*, 1994, pp. 313–316.

[8] F. Athley, "Optimization of element positions for direction finding with sparse arrays," *Proceedings of the 11th IEEE Signal Processing Workshop on statistical signal processing*, pp. 516–519, 2001.

[9] W. Xu, A. B. Baggeroer, and C. D. Richmond, "Bayesian bounds for matched-field parameter estimation," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 52, pp. 3293–3305, Dec. 2004.

[10] A. Renaux, "Weiss-Weinstein bound for data aided carrier estimation," *IEEE Signal Processing Lett.*, vol. 14, no. 4, pp. 283–286, Apr. 2007.

[11] D. T. Vu, A. Renaux, R. Boyer, and S. Marcos, "Closed-form expression of the Weiss-Weinstein bound for 3D source localization: the conditional case," in *Proc. IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop*, Kibutz Ma'ale Hahamisha, Israel, Oct. 2010.

[12] B. Ottersten, M. Viberg, P. Stoica, and A. Nehorai, "Exact and large sample maximum likelihood techniques for parameter estimation and detection in array processing," in *Radar Array Processing*, S. Haykin, J. Litva, and T. J. Shepherd, Eds. Berlin: Springer-Verlag, 1993, ch. 4, pp. 99–151.