

Borne de Cramér-Rao pour la conception de réseaux de capteurs en présence des sources dispersées

Wenmeng XIONG, José PICHERAL, Sylvie MARCOS*

Laboratoire des signaux et systèmes, CentraleSupélec-CNRS-Université Paris-Sud
3 rue de Joliot-Curie, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France
prénom.nom@12s.centralesupelec.fr

Résumé – Le modèle de source ponctuelle est couramment utilisé pour le traitement d’antenne, néanmoins, certaines applications physiques comme, par exemple, l’imagerie aéro-acoustique [1], n’obéissent pas à cette hypothèse, car la dispersion angulaire de la source n’est pas négligeable. Dans cet article, nous proposons une expression approchée de la borne de Cramér-Rao (BCR) dans le cas d’une source dispersée. En outre, nous montrons que la composante d’inter-corrélation de la direction d’arrivée (DDA) et du paramètre de dispersion angulaire de la source peut être réduite, voire annulée par des géométries particulières du réseau de capteurs. Les résultats de simulations numériques sont en adéquation avec les résultats théoriques.

Abstract – In array signal processing the signals impinging on the array are often assumed to come from point sources. However, in some applications, for example, in aero-acoustic imaging [1], the angular dispersion is no longer negligible and a model for distributed sources could be more appropriate. In this paper, focusing on the distributed source model, we derive an approximated expression of the Cramér-Rao bound in the case of one distributed source. In addition, we find that the component of the inter-correlation of the direction of arrival and the angular dispersion parameter of the source can be canceled by some particular geometries of the antenna array. The simulation results validate the theoretical results.

1 Introduction

En traitement d’antennes, les méthodes d’estimation de la DDA sont majoritairement développées en supposant que les sources émettrices sont ponctuelles. Cependant, la dispersion angulaire de la source n’est pas négligeable dans certaines applications [1], et peut occasionner une perte de performances sur les algorithmes de localisation de sources [2]. Le modèle de sources spatialement dispersées peut donc être plus approprié.

Des estimateurs tenant compte de la dispersion angulaire de la source ont été développés, par exemple, [3], ou le "Distributed Signal Parameter Estimator" (DSPE) [4]. Le DSPE est basé sur MUSIC et les performances peuvent atteindre la BCR quand le rapport signal sur bruit (RSB) est suffisant.

Dans la littérature, l’impact de la géométrie d’antenne sur la BCR a été étudiée dans le cas de sources ponctuelles [7] [8]. En particulier, il a été montré que, même si l’antenne linéaire uniforme (ALU) est plus facile à paramétrer, des géométries différentes peuvent conduire à de meilleures performances.

Dans cet article, nous étudions l’effet de la géométrie d’antenne sur la BCR dans le cas d’une source dispersée. Nous proposons une expression approchée au second d’ordre pour l’estimation conjointe angle/dispersion. Ensuite, nous étudions l’influence de la géométrie sur le terme croisé de la BCR entre la DDA et la dispersion angulaire en fonction des positions des capteurs, nous montrons qu’il peut être annulé pour des géométries particulières.

L’organisation du papier est la suivante. Dans la section 2

nous introduisons le modèle du signal de sources dispersées. Dans la section 3, nous présentons les expressions approchées de la BCR et l’analyse de la géométrie d’antenne. Les simulations dans la section 4 valident nos résultats théoriques, et les bornes sont comparées avec les performances de DSPE.

2 Modèle du signal

Dans le cas général de [4], q sources cohérentes (sources CD) à bande étroite et situées en champ lointain, propagent des signaux vers un réseau de M capteurs. Les sources sont caractérisées par des DDA $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ et la position du $m^{\text{ième}}$ capteur est donnée par les coordonnées polaires ρ_m et α_m . Sans perte de généralité, nous supposons que les sources et les capteurs sont dans le même plan, comme indiqué dans la Figure 1a. Les q sources et les M signaux reçus par le réseau de capteurs à l’instant t sont donnés respectivement par $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_q(t)]^T$ et $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), \dots, y_M(t)]^T$, avec:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t), \quad (1)$$

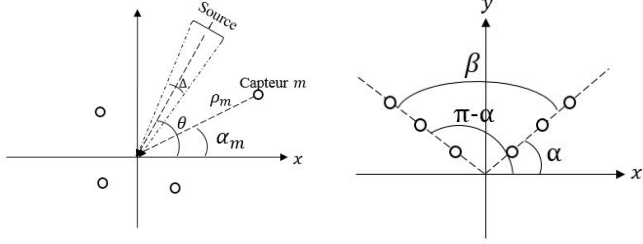
où $\mathbf{n}(t) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ représente le bruit additif Gaussien complexe, $\mathbf{C}(\theta) = [\mathbf{c}_{h_1}(\theta_1), \dots, \mathbf{c}_{h_q}(\theta_q)] \in \mathbb{C}^{M \times q}$ est la matrice des q vecteurs directionnels étendus $\mathbf{c}_{h_i}(\theta)$ définis dans [4] par:

$$\mathbf{c}_{h_i}(\theta_i) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{a}(\theta_i + \phi) h_i(\phi) d\phi, \quad (2)$$

où $i = 1 \dots q$, et $\mathbf{a}(\theta)$ est le vecteur directionnel pour une source ponctuelle, qui est donné par:

$$\mathbf{a}(\theta_i) = \left[e^{-j2\pi \frac{\rho_1}{\lambda} \cos(\theta_i - \alpha_1)}, \dots, e^{-j2\pi \frac{\rho_M}{\lambda} \cos(\theta_i - \alpha_M)} \right]^T, \quad (3)$$

où λ est la longueur d'onde, et $[\cdot]^T$ est l'opérateur de transposition. La fonction $h(\phi)$ est introduite pour modéliser la distribution angulaire (par exemple, $h(\phi)$ peut suivre une distribution uniforme ou une distribution Gaussienne), et elle est paramétrée par une dispersion angulaire Δ qui est omise dans la notation.



(a) Antenne plane et la source (b) Antenne en forme de V

FIG. 1: Illustration de l'antenne

3 La borne de Cramér-Rao

La BCR est une borne inférieure pour les performances optimales des estimateurs non-biaisés. La matrice de BCR est donnée par l'inverse de la matrice d'information de Fisher (MIF), dont les composantes sont déterminées par un vecteur de paramètres Φ_0 qui spécifient la loi de $\mathbf{y}(t)$. Sous l'hypothèse de modèle inconditionnel ou stochastique (MS) [5] (c'est à dire que les signaux $\mathbf{s}(t)$ sont supposés aléatoires). Φ_0 est donné par $[\theta_1, \dots, \theta_q, \Delta_1, \dots, \Delta_q, \sigma_{s1}^2, \dots, \sigma_{sq}^2, \sigma_b^2]$, où $\sigma_{s1}^2, \dots, \sigma_{sq}^2$ représentent les puissances des signaux, et σ_b^2 représente la puissance du bruit. Ici, nous considérons le cas particulier où il y a une seule source. Il est bien connu que, pour les sources ponctuelles, la puissance des signaux $\mathbf{s}(t)$ et celle du bruit $\mathbf{n}(t)$ sont découplées des paramètres des signaux et de la géométrie du réseau de capteurs. En ce qui concerne des sources dispersées, des simulations numériques montrent que, avec une petite dispersion angulaire (par exemple, $\Delta = 10^\circ$ pour une source de dispersion rectangulaire), un résultat similaire peut être obtenu. Par conséquent, sans perte de généralité, nous supposons que σ_s^2 et σ_b^2 sont connus, et le vecteur des paramètres d'intérêt devient $\Phi = [\theta, \Delta]$.

L'expression analytique de la BCR est déjà donnée dans [6] pour des sources ponctuelles. Cependant, cette expression n'est plus correcte pour les sources dispersées. Dans cette section, nous calculons, à l'aide d'une approximation d'ordre 2 sur la dispersion angulaire, une expression théorique de la BCR pour une source. Ensuite, l'impact de la géométrie du réseau de capteurs sur le terme croisé de θ et Δ est analysé.

3.1 Expressions approchées de la BCR dans le cas d'une source dispersée

Il a été proposé dans [5] que, sous la condition MS, les composantes de la MIF sont données par:

$$F_{ij} = [(BCR)^{-1}]_{ij} = N \text{tr} \left[\mathbf{R}(\Phi)^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}(\Phi)}{\partial \Phi_i} \mathbf{R}(\Phi)^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}(\Phi)}{\partial \Phi_j} \right]. \quad (4)$$

où N est le nombre d'échantillons des données reçues sur l'antenne à différents instants, $\mathbf{R}(\Phi) = E[\mathbf{y}\mathbf{y}^H]$ est la matrice de covariance des signaux reçus par les capteurs, $E[\cdot]$, $\text{tr}[\cdot]$ et $\{\cdot\}^H$ sont respectivement les opérateurs de valeur moyenne, de trace de matrice et de trans-conjugaison. On a:

$$\mathbf{R}(\Phi) = \sigma_s^2 \mathbf{c}(\Phi) \mathbf{c}(\Phi)^H + \sigma_b^2 \mathbf{I}. \quad (5)$$

L'inverse de $\mathbf{R}(\Phi)$ est calculé suivant:

$$\mathbf{R}(\Phi)^{-1} = - \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 \sigma_b^2 (\mathbf{c}(\Phi)^H \mathbf{c}(\Phi)) + \sigma_b^4} \mathbf{c}(\Phi) \mathbf{c}(\Phi)^H + \sigma_b^{-2} \mathbf{I}, \quad (6)$$

Les dérivées de $\mathbf{R}(\Phi)$ par rapport à θ et Δ sont données respectivement par:

$$\frac{\partial \mathbf{R}(\Phi)}{\partial \theta} = 2\sigma_s^2 \text{Real} \left\{ \frac{\partial \mathbf{c}(\Phi)}{\partial \theta} \mathbf{c}(\Phi)^H \right\}, \quad (7)$$

et:

$$\frac{\partial \mathbf{R}(\Phi)}{\partial \Delta} = 2\sigma_s^2 \text{Real} \left\{ \frac{\partial \mathbf{c}(\Phi)}{\partial \Delta} \mathbf{c}(\Phi)^H \right\}. \quad (8)$$

En supposant que la dispersion angulaire de la source est assez petite et symétriquement distribuée, le vecteur directionnel peut être approximé au second ordre ¹ en la dispersion Δ par:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(\theta) &\approx \int \left[\mathbf{a}(\theta) + \phi \dot{\mathbf{a}}(\theta) + \frac{1}{2} \phi^2 \ddot{\mathbf{a}}(\theta) \right] h(\phi) d\phi \\ &= \mathbf{a}(\theta) + \frac{1}{2} \sigma_h^2 \ddot{\mathbf{a}}(\theta), \end{aligned} \quad (9)$$

où $\sigma_h^2 \triangleq \int \phi^2 h(\phi) d\phi$, $\dot{\mathbf{a}}(\theta) = \frac{\partial \mathbf{a}(\theta)}{\partial \theta}$, et $\ddot{\mathbf{a}}(\theta) = \frac{\partial^2 \mathbf{a}(\theta)}{\partial \theta^2}$.

En introduisant (6), (7) et (8) dans (4), en tenant compte de l'approximation en (9), et en gardant les termes au second ordre en Δ , les composantes de la MIF sont données par:

$$\begin{aligned} F_{11} &\triangleq F_{\theta\theta} = \eta f_{\theta\theta}, \\ F_{12} &\triangleq F_{\theta\Delta} = \frac{1}{2} \sigma_\Delta \eta f_{\theta\Delta}, \\ F_{21} &\triangleq F_{\Delta\theta} = F_{\theta\Delta}^H, \\ F_{22} &\triangleq F_{\Delta\Delta} = \frac{1}{4} \sigma_\Delta^2 \eta f_{\Delta\Delta}, \end{aligned} \quad (10)$$

où $\sigma_\Delta \triangleq \int \phi^2 \frac{\partial h(\phi)}{\partial \Delta} d\phi$, et les autres notations:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{2N\sigma_s^4}{\sigma_b^2 (\sigma_s^2 (M + \sigma_h^2 \text{Real}\{\ddot{\mathbf{a}}^H \mathbf{a}\}) + \sigma_b^2)}, \\ f_{\theta\theta} &= M \dot{\mathbf{a}}^H \dot{\mathbf{a}} - |\dot{\mathbf{a}}^H \mathbf{a}|^2 + \sigma_h^2 \text{Real}\{\ddot{\mathbf{a}}^H \dot{\mathbf{a}} M + \dot{\mathbf{a}}^H \ddot{\mathbf{a}} \dot{\mathbf{a}} - \mathbf{a}^H \dot{\mathbf{a}} (\ddot{\mathbf{a}}^H \mathbf{a} + \dot{\mathbf{a}}^H \ddot{\mathbf{a}})\}, \\ f_{\theta\Delta} &= \text{Real}\{M \dot{\mathbf{a}}^H \ddot{\mathbf{a}} - \dot{\mathbf{a}}^H \mathbf{a} \dot{\mathbf{a}}^H \ddot{\mathbf{a}}\}, \\ f_{\Delta\Delta} &= M \ddot{\mathbf{a}}^H \ddot{\mathbf{a}} + \text{Real}\{\mathbf{a}^H \ddot{\mathbf{a}} \dot{\mathbf{a}}^H \ddot{\mathbf{a}}\} \\ &\quad - \frac{2M\sigma_s^2 \text{Real}\{\dot{\mathbf{a}}^H \mathbf{a}\}^2}{\sigma_b^2 + \sigma_s^2 (M + \sigma_h^2 \text{Real}\{\ddot{\mathbf{a}}^H \mathbf{a}\})}. \end{aligned} \quad (11)$$

¹* A l'ordre 1 on trouverait que $\mathbf{c}(\theta) \approx \mathbf{a}(\theta)$

On déduit de ces résultats bornes inférieures approchées au second ordre en Δ pour la variance d'erreur d'estimation de θ et de Δ sont données respectivement par:

$$BCR_{\theta\theta} = \frac{f_{\Delta\Delta}}{\eta [f_{\theta\theta} f_{\Delta\Delta} - |f_{\theta\Delta}|^2]}, \quad (12)$$

$$BCR_{R_{\Delta\Delta}} = \frac{4}{\sigma_{\Delta}^2 \eta} \cdot \frac{f_{\theta\theta}}{f_{\theta\theta} f_{\Delta\Delta} - |f_{\theta\Delta}|^2}, \quad (13)$$

$$BCR_{\theta\Delta} = \frac{2}{\sigma_{\Delta} \eta} \cdot \frac{f_{\theta\Delta}}{f_{\theta\theta} f_{\Delta\Delta} - |f_{\theta\Delta}|^2}. \quad (14)$$

3.2 Optimisation de la géométrie d'antenne d'après la BCR

Nous remarquons que le terme croisé en θ et Δ , soit $f_{\theta\Delta}$ obtenu dans la sous-section précédente, est plus simple à analyser que les autres termes de la BCR. Dans cette sous section, nous proposons de développer l'expression de $f_{\theta\Delta}$ en fonction des positions des capteurs, pour montrer ensuite l'impact de la géométrie du réseau de capteur sur $f_{\theta\Delta}$. En effet en optimisant la géométrie de manière à réduire (ou annuler) le terme $f_{\theta\Delta}$, on obtient un modèle où l'estimation de la DDA est découplé du paramètre de dispersion. Il sera donc aisé de développer des estimateurs robustes à la dispersion des sources.

Pour le $m^{\text{ième}}$ capteur, nous introduisons les notations suivantes concernant les positions des capteurs:

$$\begin{aligned} \varphi_m &= 2\pi \frac{\rho_m}{\lambda} \cos(\theta - \alpha_m), \\ \dot{\varphi}_m &= -2\pi \frac{\rho_m}{\lambda} \sin(\theta - \alpha_m), \\ \ddot{\varphi}_m &= -2\pi \frac{\rho_m}{\lambda} \cos(\theta - \alpha_m). \end{aligned} \quad (15)$$

En prenant compte des notations en (15), le terme croisé $f_{\theta\Delta}$ devient:

$$f_{\theta\Delta} = M^2 \left[\overline{\dot{\varphi} \cdot \ddot{\varphi}} - \overline{\dot{\varphi}} \cdot \overline{\ddot{\varphi}} + j(\overline{\dot{\varphi}^3} + \overline{\dot{\varphi}} \cdot \overline{\dot{\varphi}^2}) \right], \quad (16)$$

où $\overline{[\cdot]}$ est l'opérateur de la valeur moyenne sur l'ensemble des capteurs (ex : $\overline{\dot{\varphi}} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \dot{\varphi}_m$).

3.2.1 Antenne circulaire

Inspirés par (16), nous constatons que pour une antenne circulaire uniforme (ACU) avec un nombre pair d'éléments symétriques, où $\rho_m = \rho$, et $\alpha_m = 2\pi \frac{(m-1)}{M}$ avec M pair, nous avons:

$$\overline{\dot{\varphi}} = -\frac{1}{M} 2\pi \frac{\rho}{\lambda} \sum_{m=1}^M \sin(\theta - \alpha_m) = 0, \quad (17)$$

car $\sin(\theta - \alpha_m) = -\sin(\theta - \alpha_{m+\frac{M}{2}})$, pour $1 \leq m \leq \frac{M}{2}$ et d'une manière similaire:

$$\overline{\dot{\varphi} \cdot \ddot{\varphi}} = \frac{(2\pi \frac{\rho}{\lambda})^2}{M} \sum_{m=1}^M \underbrace{\sin(\theta - \alpha_m) \cos(\theta - \alpha_m)}_{\frac{1}{2} \sin(2\theta - 2\alpha_m)} = 0. \quad (18)$$

Ceci conduit à $f_{\theta\Delta} = 0$. Ce résultat montre qu'avec une telle géométrie, la borne sur θ et la borne sur Δ peuvent être découplées, quelle que soit la dispersion de la source.

3.2.2 Antenne en forme de V

Le réseau d'antenne en forme de V (AV) est un autre type de géométrie qui a été largement étudié, dans le cas des sources ponctuelles. Il a été prouvé dans [8] que, quand l'angle d'ouverture d'antenne est fixé à une valeur spécifique, une AV avec n'importe quelle taille peut avoir un comportement isotrope pour la BCR. Ici, nous nous intéressons au cas de source dispersée.

Supposons que, sans perte de généralité, les deux branches identiques sont symétriques par rapport à l'axe de y , sans capteur placé à l'origine, comme représenté dans la figure 1b, et que la distance entre deux capteurs est fixée à d . Les coordonnées des capteurs peuvent être exprimées séparément comme suit:

$$\rho_m = \begin{cases} md, & 1 \leq m \leq \frac{M}{2} \\ (m - \frac{M}{2})d, & \frac{M}{2} \leq m \leq M \end{cases}, \quad (19)$$

et:

$$\alpha_m = \begin{cases} \alpha, & 1 \leq m \leq \frac{M}{2} \\ \pi - \alpha, & \frac{M}{2} \leq m \leq M \end{cases}. \quad (20)$$

En tenant compte de la géométrie en forme de V, $f_{\theta\Delta}$ est donnée par:

$$f_{\theta\Delta} = \frac{M^2(M+2) \sin \theta \cos \theta}{96} [(4+4M) \cos^2 \alpha + (2-M) \sin^2 \alpha]. \quad (21)$$

Nous pouvons remarquer que, pour que $f_{\theta\Delta}$ soit nulle, l'angle d'ouverture doit satisfaire à:

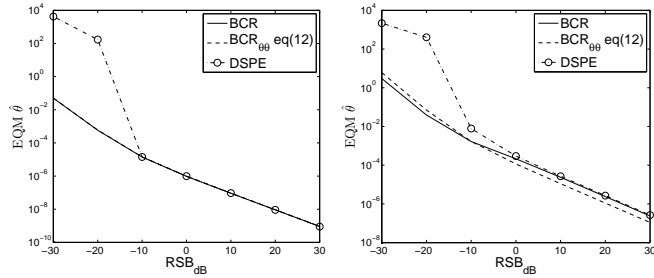
$$\tan^2 \alpha = \frac{4M+4}{M-2}, \quad (22)$$

Nous pouvons constater que, dans le cas des sources dispersées, il est possible de trouver une valeur spécifique pour l'angle d'ouverture de l'antenne en V, qui ne dépend que du nombre de capteurs, et qui conduit au découplage entre les performances en θ et en Δ .

4 Résultats numériques

Dans cette section, nous validons les résultats théoriques par des simulations numériques. Dans toutes les simulations, la source uniformément distribuée avec $\Delta = 10^\circ$ est considérée. Le nombre d'échantillons est $N = 1000$. Pour ACU, $M = 20$ capteurs qui sont uniformément distribués sur un cercle avec le diamètre 5λ . Pour AV, 10 capteurs sont placés identiquement sur les deux branches, espacés de $\lambda/4$. $\alpha = 0$ correspond au cas particulier d'une antenne linéaire (AL).

Tout d'abord, nous comparons les performances de DSPE dans [4] et BCR en fonction du RSB sur la Figure 2 pour la ACU. DSPE et un estimateur basé sur MUSIC bidimensionnel pour l'estimation conjointe de θ et Δ en supposant connue la fonction $h(\phi)$. 1000 réalisations de Monte Carlo sont exécutées pour DSPE. Nous pouvons remarquer la validation de la BCR approximée, et l'approximation fonctionne mieux pour la



(a) EQM de DSPE et la BCR sur θ en fonction de RSB avec ACU (left) et EQM DSPE et la BCR sur Δ en fonction de RSB avec ACU (right)

FIG. 2: EQM de DSPE et la BCR en fonction de RSB

borne de θ que pour Δ . En plus, comme nous pouvons nous y attendre, l'erreur quadratique moyenne (EQM) de θ et Δ peuvent atteindre la borne à partir d'un certain RSB.

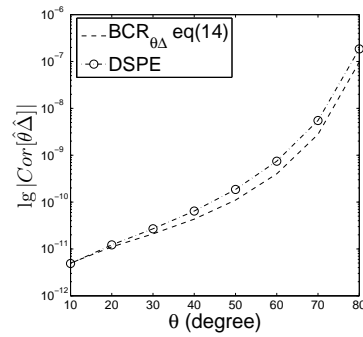
La figure 3 représente l'évaluation du terme croisé entre θ et Δ de la BCR respectivement pour une AL et pour une AV, avec $RSB = 30dB$. $\lg|BCR_{\theta\Delta}|$ et l'inter-covariance de $\hat{\theta}$ et $\hat{\Delta}$ sont représentés respectivement sur la figure 3b et la figure 3c en fonction de θ et de l'angle d'ouverture du réseau de capteur, soit $\beta = \pi - 2\alpha$ pour une AV. β_{min} correspond à la valeur de β pour laquelle $F_{\theta\Delta}$ s'annule en dépit de θ pour une AV. Par contre, pour une AL, la borne du terme croisé augmente avec la valeur de θ . D'après (22), avec une telle configuration d'antenne, $\beta_{min} \approx 49.7^\circ$ ce qui est en adéquation avec le résultat de la simulation.

5 Conclusion

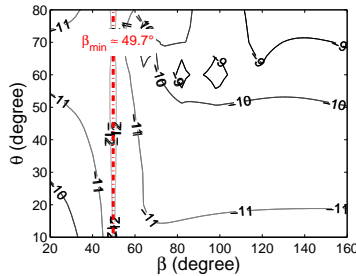
Dans cet article, nous avons étudié l'expression approchée de la BCR sous condition MS, pour les paramètres concernant la DDA et la dispersion angulaire des signaux en présence d'une source dispersée. En plus, nous montrons que, avec certaines géométries particulières du réseau de capteurs, il est possible d'annuler le découplage entre la borne inférieure de la DDA et celle de la dispersion angulaire de la source. Les résultats de simulations sont en adéquation avec les résultats théoriques, et nous motive à aller plus loin pour le cas de plusieurs sources.

References

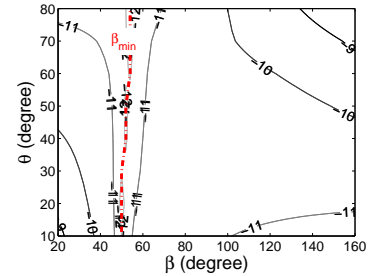
- [1] N. Chu and A. Djafari and J. Picheral. *Robust Bayesian super-resolution approach via sparsity enforcing a priori for near-field aeroacoustic source imaging*. Journal of Sound and Vibration, 76(18) 2013.
- [2] Astély, D. and Ottersten, B.. *The effects of local scattering on direction of arrival estimation with MUSIC*. Signal Processing, IEEE Trans. on, 47(12), 1999.
- [3] Ferréol, A. and Boyer, E. and Yin, X. and Fleury, B. and Larzabal, P. *A simple decoupled estimation of DoA and*



(a) L'inter-covariance de $\hat{\theta}$ et de $\hat{\Delta}$ de DSPE et $|BCR_{\theta\Delta}|$ théorique eq (14) avec AL



(b) $\lg|BRC_{\theta\Delta}|$ théorique eq (14) avec AV



(c) L'inter-covariance de $\hat{\theta}$ et de $\hat{\Delta}$ avec DSPE et AV

FIG. 3: Le terme croisé de la borne avec AL et AV

angular spread for single spatially distributed sources. 2006 14th European.

- [4] S.Valaee and B.Champagne and P.Kabal. *Parametric localization of distributed sources*. IEEE Trans. on Signal Processing, 43(9), 1995.
- [5] P.Stoica and A.Nehorai *Performance study of conditional and unconditional direction-of-arrival estimation*. Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Trans. on, 38(10), 1990.
- [6] B.Porat and B.Friedlander *Analysis of the asymptotic relative efficiency of the MUSIC algorithm*. Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Trans. on, 36(4), 1988.
- [7] Gazzah, H. and Marcos, S. *Cramer-Rao bounds for antenna array design*. Signal Processing, IEEE Trans. on, 54(1), 2006.
- [8] H.Gazzah and K.Abed-Meraim *Optimum ambiguity-free directional and omnidirectional planar antenna arrays for DOA estimation*. Signal Processing, IEEE Trans. on, 57(10), 2009.